Introduction à la Cinématique

1. Introduction

La **cinématique** est la partie de la mécanique qui permet d'étudier et de décrire les mouvements des corps, d'un point de vue purement mathématique, indépendamment des causes qui les produisent.

L'analyse des grandeurs cinématiques (position, vitesse et accélération) permet de déterminer la géométrie et les dimensions des composants d'un mécanisme.

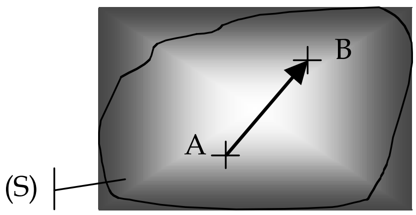
La cinématique, combinée à l'étude des actions mécaniques, permet l'application du principe fondamental de la dynamique (chapitre étudié ultérieurement).

Exemples : Usinage : trajectoire d'un outil, vitesse d'avance ;

Dimensionnement d'une pompe : cylindrée, débit …

2. Hypothèse

Dans le cadre de nos études cinématiques nous considèrerons que les solides seront **indéformables**.

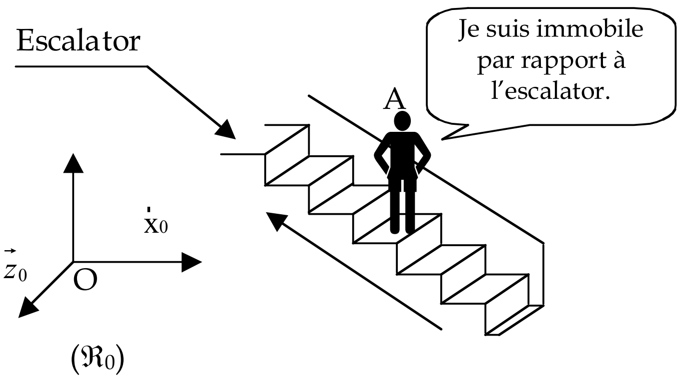


Une pièce mécanique (S) peut être considérée comme un solide **indéformable** si quels que soient les points A et B appartenant à (S) la distance AB reste constante au cours du temps.

$$\forall A \text{ et } B \in (S),\ \forall t,\ \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \text{constante}$$

3. Référentiels

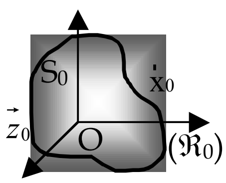
Observons un Individu (A) immobile sur un escalator.

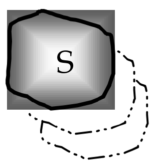


Le repère $\Re_0$ est lié au sol.

L'individu A est *mobile* dans le repère $\Re_0$, mais *immobile* par rapport à l'escalator.

L'étude de tout mouvement implique **deux solides en présence** :
- Le solide (S) dont on étudie le mouvement ;
- Le solide (S_0) par rapport auquel on définit le mouvement.

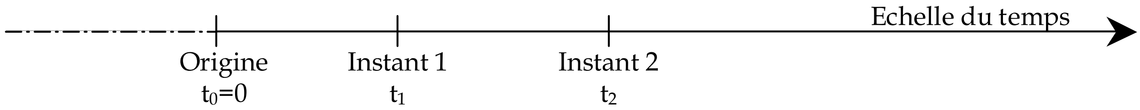




Le solide (S_0) est appelé ***solide de référence***, auquel on associe le ***repère de référence*** $\Re_0$. Le mouvement du solide (S) par rapport au solide (S_0) est noté **Mvt S/S$_0$**.

Quelle que soit l'étude cinématique à réaliser, on a toujours besoin de **la situer dans le temps**. On appelle ***instant t*** ou ***date t*** le temps écoulé depuis une origine des temps $t_0=0$, choisie arbitrairement.

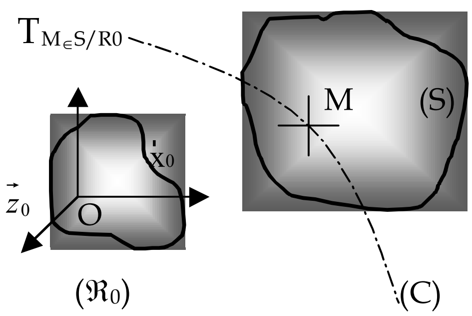
L'unité de mesure du temps (système ISO) est la seconde, notée ***s***.



La grandeur $\Delta t = t_2-t_1$ est appelée durée entre les deux instants t_1 et t_2.

4. Trajectoire

On appelle ***trajectoire du point (M)*** d'un solide (S) l'ensemble des positions occupées successivement par ce point, au cours du temps, et au cours de son déplacement par rapport à un référentiel donné. Une trajectoire est donc représentée par une courbe (C).



Cette trajectoire sera notée :

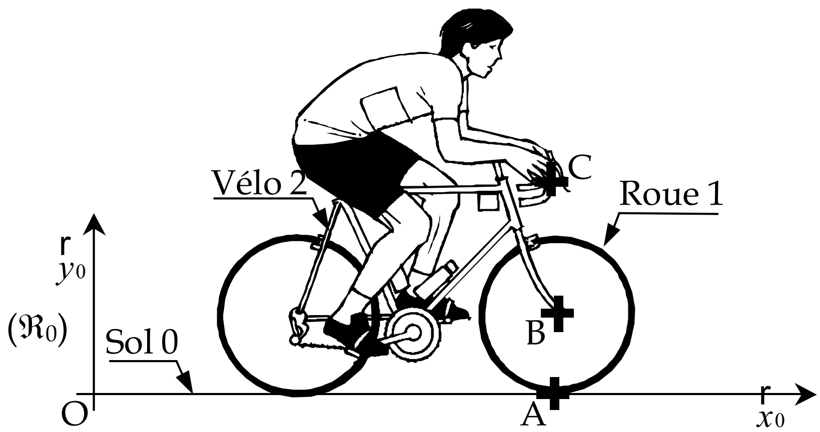
$T_{M\in S/R0}$: trajectoire du point M appartenant à S, par rapport au repère $\Re_0$.

Remarque : Il est, parfois, plus judicieux de remplacer le terme « appartenant à » par « accroché à » pour avoir une meilleure visualisation de la trajectoire…

Exemple :

Considérons une bicyclette et son pilote en mouvement par rapport à un repère $\Re_0$ considéré comme fixe.

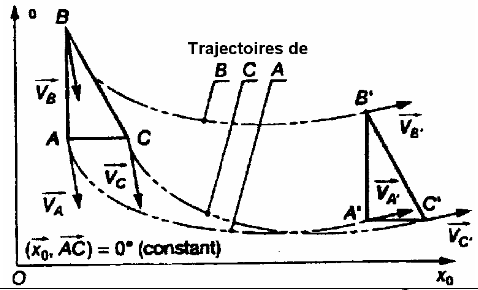
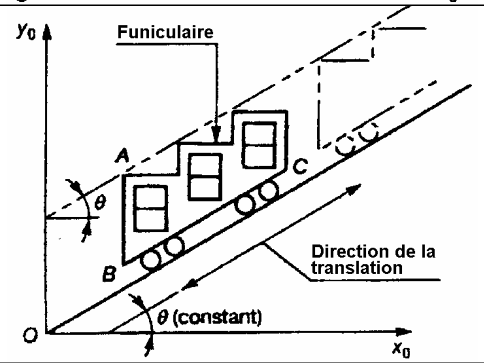
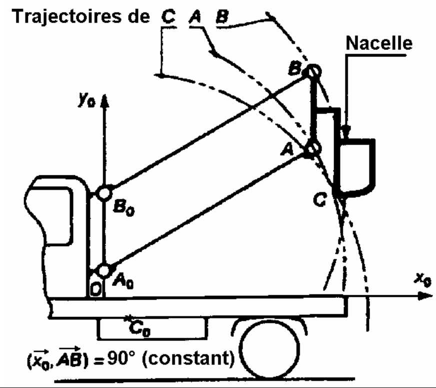
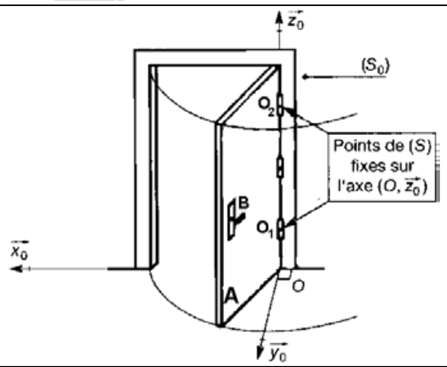
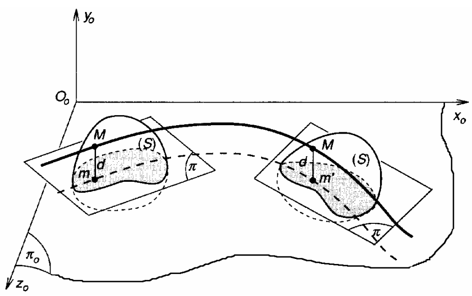
Soit A le point de contact entre la roue 1 et le sol 0.
Soit B le centre de l'articulation entre la roue 1 et le cadre 2.
Soit C un point appartenant à une poignée de frein.



Déterminez et tracez les trajectoires suivantes :

- ➲ $T_{C\in 2/0}$:
- ➲ $T_{B\in 2/0}$:
- ➲ $T_{A\in 2/0}$:
- ➲ $T_{B\in 1/2}$:
- ➲ $T_{A\in 1/2}$:
- ➲ $T_{B\in 1/0}$:
- ➲ $T_{A\in 1/0}$:

5. *Mouvements particuliers de solides*

Famille de mouvement	Mouvement particulier	Exemple	Définition
Translation	Translation quelconque		Un solide est en translation dans un repère R si n'importe quel bipoint (AB) du solide reste parallèle à sa position initiale au cours du mouvement.
	Translation rectiligne		Tous les points du solide se déplacent suivant des lignes parallèles entre elles.
	Translation circulaire		Tous les points du solide se déplacent suivant des courbes géométriques identiques ou superposables.
Rotation	Rotation		Tous les points du solide décrivent des cercles concentriques centrés sur l'axe du mouvement.
Mouvement plan	Mouvement plan		Tous les points du solide se déplacent dans des plans parallèles entre eux.

6. *Vecteur position*

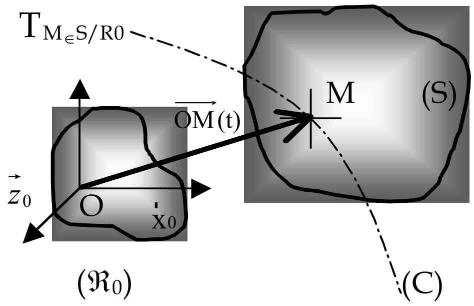
Nous devons être en mesure, à tout instant t, de définir la position de n'importe quel point du solide dans l'espace. Pour ce faire, nous utiliserons le ***vecteur position***.

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère $\Re_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Soit M un point appartenant au solide (S) de coordonnées x(t),y(t),z(t) à l'instant t considéré.

Au cours de ce mouvement, le point M décrit dans le repère $\Re_0$ une courbe (C) appelée ***trajectoire*** du point M(t) dans le repère $\Re_0$.

Le *vecteur position* du point M(t) du solide (S), dans le repère $\Re_0$, à l'instant t, est le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ où O est l'origine du repère $\Re_0$.



Le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ s'exprime de la manière suivante : $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t).\vec{x}_0 + y(t).\vec{y}_0 + z(t).\vec{z}_0}$

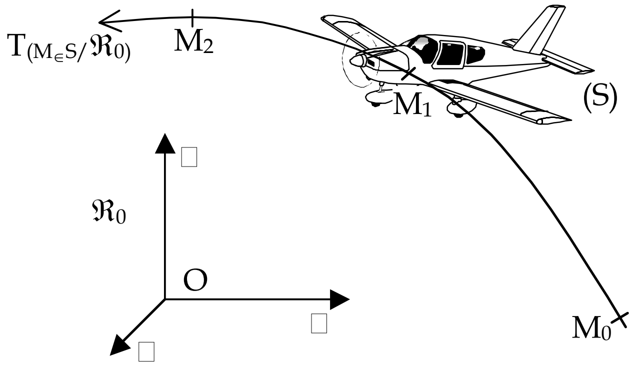
7. *Notion de vitesse*

Soit (S) un solide en mouvement dans un repère $\Re_0$.
Soit M un point appartenant au solide (S), de coordonnées x(t), y(t) et z(t) à l'instant t.

Soit $T(M\in S/\Re_0)$ du point M appartenant à S, par rapport au repère $\Re_0$.

Sur cette trajectoire, choisissons par convention :

- une origine M_0 ;
- un sens positif ;
- une unité de longueur.



On relève, aux instants t_0, t_1, t_2, les positions du point M appartenant à S dans le repère $\Re_0$.

Instant	t_0	t_1	t_2
Position sur $T(M\in S/\Re_0)$	M_0	M_1	M_2
Abscisse curviligne s = f(t)	$s_0 = 0$	$s_1 = M_0M_1$	$s_2 = M_0M_2$

$\overline{S}$ = arc M_0M = valeur algébrique, à l'instant t, de l'arc orienté M_0M

Entre les deux instants t_1 et t_2, il est possible de définir la **vitesse moyenne** du point M appartenant à S, par rapport au repère $\Re_0$:

$$\boxed{V(t_1 \rightarrow t_2)_{moy} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Une vitesse s'exprime en m/s

Pour définir la « grandeur cinématique» suivante, nous allons faire tendre l'intervalle de temps Δt vers zéro. Nous aboutirons, ainsi, à la mise en place du *Vecteur vitesse instantanée*.

8. *Vecteur vitesse instantanée*

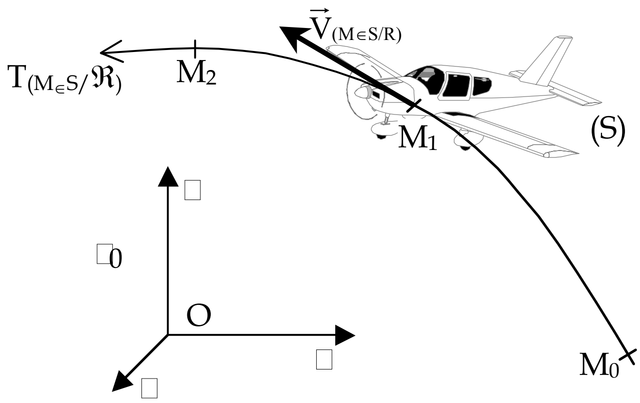
Par définition, le *vecteur vitesse* instantanée du point M dans son mouvement par rapport au repère $\Re$ $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, est égal à la dérivée vectorielle (par rapport au temps) du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, dans le repère $\Re$.

$$\vec{V}_{(M\in S/R)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{V}_{(M\in S/R)} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re}}$$

Le vecteur $\vec{V}_{(M\in S/R)}$ est tel que :

- son origine est confondue avec la position de M à l'instant t ;
- il est toujours tangent en M à la trajectoire $T(M\in S/\Re)$;
- il est orienté dans le sens du mouvement ;
- sa norme est $\left\|\vec{V}_{(M\in S/R)}\right\| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$;
- unité : mètre par seconde, soit m/s.



Autre expression possible :

Si l'on connaît $\overrightarrow{OM}\left|\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix}\right._{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ Alors, $\vec{V}_{(M\in S/R)}\left|\begin{matrix} x'(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ y'(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ z'(t) = \dfrac{dz(t)}{dt} \end{matrix}\right._{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

9. *Vecteur Accélération instantanée*

Par définition le *vecteur accélération* instantanée du point M dans son mouvement par rapport au repère $\Re$ $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, est égal à la dérivée vectorielle (par rapport au temps) du vecteur vitesse $\vec{V}_{(M\in S/R)}$, dans le repère $\Re$.

$$\boxed{\vec{\Gamma}_{(M\in S/R)} = \left(\frac{d\vec{V}_{(M\in S/R)}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\Re}}$$

L'accélération est parfois notée : $\vec{a}_{(M\in S/R)}$ ou $\vec{\gamma}_{(M\in S/R)}$
Une accélération s'exprime en m/s².

Autre expression possible :

Si l'on connaît $\overrightarrow{OM}\left|\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix}\right._{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ Alors, $\vec{\Gamma}_{(M\in S/R)}\left|\begin{matrix} x''(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ y''(t) = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \\ z''(t) = \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} \end{matrix}\right._{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$